LUMINARIA
Volume 1, Número 9 / 2008
ISSN 1519-745X

O SURGIMENTO DA INTEGRAL

Gilson Tumelero[1]

Marieli Musial[2]

Resumo

Muitas demarcações de terrenos na antiguidade, não eram figuras poligonais. Com o intuito de calcular essas áreas, foram desenvolvidos os estudos sobre integrais. Em seguida, muitos matemáticos dedicaram seus esforços com intensão desenvolver o conceito de integração já não mais somente com o objetivo inicial de calcular áreas. Alguns deles foram Newton-Leibniz, Cauchy, Riemann e Lebesgue os quais serão apresentados de forma sucinta neste artigo.

Palavras-chave: História da Matemática, Área, Integral.

1 Introdução

O conceito de integral é mais antigo que o de derivada. Enquanto este surgiu no século XVII, à idéia de integral, como área de uma figura plana ou volume de um sólido, surge e alcança um razoável desenvolvimento com Arquimedes (285-212a.C.) na antiguidade. Naquela época, entretanto, a matemática era muito geométrica, não havia simbologia desenvolvida, portanto, faltavam recursos para o natural desabrochar de um "calculo integral" sistematizado.

Devido a isto, os problemas que se punham eram os de calcular áreas, volumes e comprimentos de arcos. Por exemplo: suponhamos dada uma função $f: [a; b]\rightarrow IR$, limitada no intervalo $[a; b]$. Admitamos, por simplicidade, que f seja não negativa, isto é, $f(x) \geq 0, \forall x \in IR$. Consideremos o conjunto $S = \{(x, y) \in IR^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, formadas pelos pontos compreendidos entre os eixos das abscissas, o gráfico de f e as retas verticais $x = a$ e $x = b$. Qual a área deste conjunto? Em primeiro lugar, é necessário dizer o que significa a "área" de S, e em seguida, tentar calculá-la.

A área de um subconjunto limitado S no plano IR^2 deve ser um número real. Como defini-lo? Podemos admitir que sabemos calcular a áreas de polígonos e tomar como aproximações por falta deste número as áreas dos polígonos contidos em S. Isto equivale a

[1] Professor da FAFIUV, mestre em Matemática pela UEM
[2] Professora da FAFIUV, mestre em Matemática pela UEM

LUMINARIA
Volume 1, Número 9 / 2008
ISSN 1519-745X

pôr: a área de *S* é o supremo das áreas dos polígonos contido em *S*. Poderíamos também considerar as áreas dos polígonos que contém *S* como aproximações por excesso para a área de *S*. Neste caso, definiríamos a área de *S* como o ínfimo das áreas dos polígonos que contém *S*. Porém, estes dois métodos de definir a área de *S* nem sempre conduzem a um mesmo resultado.

Ao considerar a área de um conjunto *S* podemos, por simplicidade, restringir nossa atenção a polígonos de um tipo especial, que chamaremos de *polígonos retangulares*, os quais são reuniões de retângulos justapostos cujos lados são paralelos aos eixos $x = 0$ e $y = 0$.

Mais particularmente ainda, se o conjunto *S* é determinado por uma função não negativa $f: [a; b] \rightarrow IR$, de modo que $S = \{(x, y) \in IR^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, basta considerar os polígonos retangulares formados por retângulos cujas bases inferiores estão sobre os eixos das abscissas e cujas bases superiores tocam o gráfico da função conforme a figura 1.

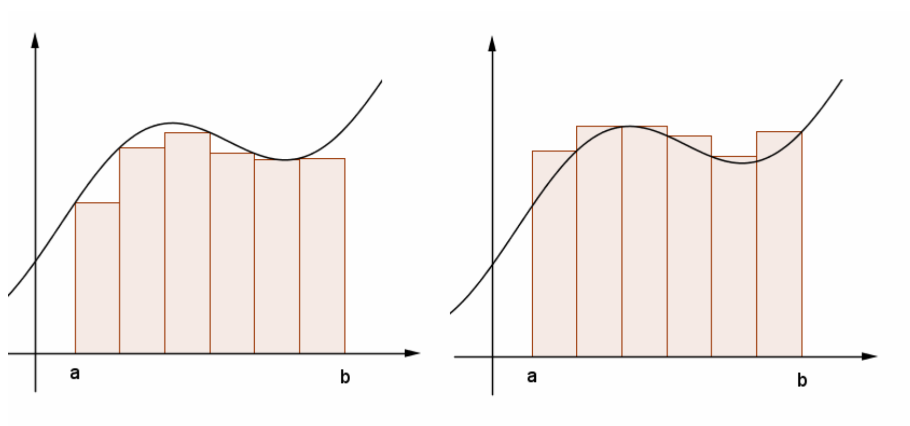

Figura 1:

A área de *S*, por falta, será definida como *integral inferior* (figura 1) e a área por excesso, como *integral superior* de *f*.

A teoria da integral desenvolveu-se, segundo as idéias de Newton e Leibniz como o inverso da derivada. Entretanto, Cauchy retornou a concepção de Leibniz com o estudo da integral na classe das funções contínuas em um intervalo *[a; b]*. De posse da noção de limite definiu integral para uma função contínua em *[a; b]* representada por:

$$\int f(x)dx \,.$$

Posteriormente o conceito de integral de Cauchy foi estendido à classe das funções quase contínuas por Riemann. O passo decisivo na teoria de integral foi dado em 1901 por Lebesgue.

2 Integral De Newton-Leibniz

Considere uma função contínua $y = f(x)$, dado em um intervalo *[a; b]*, salvo seu sinal neste intervalo (figura 2). A figura, limitada pelo gráfico desta função no intervalo *[a; b]* e as linhas retas $x = a$ e $x = b$, é chamado de trapezóide curvilíneo. Para calcular a área de trapezóides curvilíneos a seguinte propriedade é usada: *Se f é uma função contínua e não-negativa no intervalo [a; b], e F sua primitiva neste intervalo, então a área A que corresponde à área do trapezóide curvilíneo, é igual a um incremento da primitiva no intervalo [a; b], isto é* $A = F(b) - F(a)$.

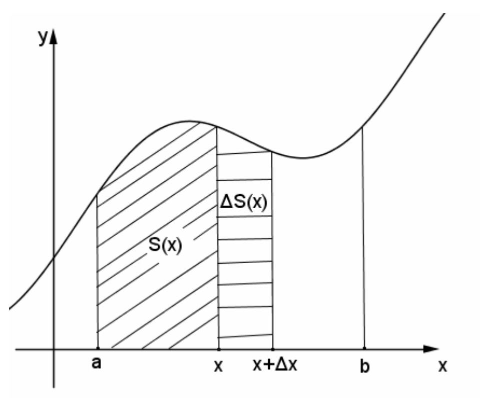

Figura 2

Considere uma função $S(x)$, em um intervalo *[a; b]* dado. Se $a < x \leq b$, então $S(x)$ é a área da parte do trapezóide curvilíneo, que é colocado na esquerda de uma linha vertical reta, passando pelo ponto de coordenadas *(x; 0)*. Note que, se $x = a$, então $S(a) = 0$ e se $x = b$, então $S(b) = A$ (A é a área do trapezóide curvilíneo). Ou seja,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

$$S'(x) = f(x)$$

isto é, *S*(*x*) é uma primitiva para *f*(*x*). De acordo com a propriedade básica das primitivas, $\forall x \in [a;b]$ tem-se *S*(*x*) = *F*(*x*) + *C* onde *C* é alguma constante, *F* é uma das primitivas para uma função *f*.

Para encontrar *C*, substituímos *x* = *a* em *F*(*a*) + *C* = *S*(*a*) = 0, donde, *C* = -*F*(*a*) e *S*(*x*) = *F*(*x*)- *F*(*a*). Porque a área do trapezóide curvilíneo é igual a *S*(*b*), substituindo *x* = *b*, temos: *A* = *S*(*b*) = *F*(*b*) - *F*(*a*)

2.1 Integral Definida

Considere uma outra maneira calcular a área de um trapezóide curvilíneo. Divida um intervalo *[a; b]* em *n* segmentos de comprimento iguais por pontos:

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ e pondo $\Delta x = \dfrac{(b-a)}{n} = x_k - x_{k-1}$ onde k = 1,2,...,n-1,n.

Cada um dos intervalos $[x_{k-1}; x_k]$ será a base do retângulo cuja altura é $f(x_{k-1})$. A área deste retângulo é igual a:

$$f(x_{k-1})\Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1})$$

e as somas das áreas retangulares são:

$$S_n = \frac{b-a}{n}[f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{k-1})].$$

Na seguinte figura 1, podemos observar os retângulos os quais tem como base as partições acima citadas. O primeiro resulta na área inferior e o segundo na área superior:

Em vista da continuidade de uma função *f*(*x*) uma união dos retângulos inscritos ou que inscrevem o trapezóide, construídos em grande número, isto é, em pequeno Δx, coincide com o nosso trapezóide curvilíneo, então $S_n \approx A$ para uma quantidade grande de *n*. Isso significa que $S_n \to A$ quando $n \to \infty$. Este limite é chamado *integral de uma função f(x) de a até b ou uma integral definida* $\int_b^a f(x)dx$, isto é, $S_n \to \int_b^a f(x)dx$ quando $n \to \infty$. Os números *a* e *b* são chamados *limites da integração* e *f(x)dx o integrando*. Assim

LUMINARIA
Volume 1, Número 9 / 2008
ISSN 1519-745X

se $f(x) \geq 0$ em um intervalo *[a; b]* então uma área A correspondente ao trapezóide curvilíneo é representado pela fórmula: $A = \int_b^a f(x)dx$.

2.2 Fórmula de Newton-Leibniz

Comparando as duas fórmulas de área de um trapezóide curvilíneo chegamos a conclusão: se $F(x)$ é uma primitiva para a função $f(x)$ em um intervalo *[a; b],* então

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Esta é a famosa fórmula de Newton-Leibniz, válida para toda função $f(x)$, que for contínua num intervalo *[a; b].*

3 Integral De Cauchy

No século XVIII a derivada era interpretada mais como um operador algébrico que transformava umas em outras expressões analíticas que representavam as funções. De maneira análoga, a *integral definida*, embora sabidamente a área sob o gráfico de uma função era interpretada como a diferença de valores de uma mesma primitiva da função. Assim, calcular uma integral definida significava essencialmente achar uma primitiva, ou seja, *transformar algebricamente* a expressão analítica de uma função em outra. Como se vê, a ênfase era posta na idéia de função dada por uma expressão analítica. Mas esses conceitos do século XVIII - não só de derivada e integral, como os de funções e continuidade - eram insuficientes para lidar com os novos problemas que surgiam no final do século.

Cauchy foi o primeiro a introduzir a integral analiticamente. Em seu "Ressumée" de 1823 ele define integral como o limite de somas do tipo:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Ou seja, quebrou o domínio da integração em subintervalos de tamanho arbitrário por uma divisória $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ e calculou a área como o limite de $f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_n)(x_n - x_{n-1})$, então quando n aumenta, esta soma se aproxima da área do trapezóide definido sob o gráfico de *f*, estabelecendo assim sua existência para toda a função contínua. E com essa definição demonstra que toda função contínua num intervalo limitado é integrável (embora em sua demonstração proceda desapercebidamente como se a função fosse uniformemente contínua). Disto resulta que toda função *f* possui primitiva.

Como se vê, a integral assim definida dispensa com a restrita concepção de que *f* tenha uma função analítica. Basta que a função *f* seja contínua para que exista *F* tal que $F'(x) = f(x)$; *F* é a integral definida de *f* num intervalo *[a; b]*.

4 Integral De Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) estudou em Göttingen, onde obteve seu doutorado com uma tese sobre funções de variáveis complexas. Após o que começou a se preparar para a "habilitação" (que lhe daria direito de dar aulas na universidade como "Privatdozent"), e para isso tinha de apresentar uma tese. Ele subteu três trabalhos diferentes, um sobre as séries trigonométricas, outro sobre os fundamentos da geometria e um terceiro em Física-Matemática. A comissão de exame, presidida por Gauss, escolheu ouvi-lo sobre os fundamentos da geometria. Diz-se que Gauss saiu do exame elogiando o trabalho de Riemann, o que dá a medida do novo talento, já que Gauss não era muito dado a elogios. Esse trabalho de Riemann, diga-se de passagem, é aquele que lançava os fundamentos de uma nova disciplina, a Geometria Riemanniana.

Riemann foi aluno de Dirichlet, num curso sobre teoria dos números em Berlin, e por ele nutria grande admiração. Em 1852 Dirichlet esteve visitando Göttingen, quando novamente dele se aproximou. Desta vez, engajado que estava na preparação de seu trabalho sobre as séries trigonométricas, teve, nesse assunto, a influência direta e o estímulo de Dirichlet. Ao que parece, foi esse mesmo ano que Riemann concluiu o referido trabalho, cuja publicação (por Dedekind), todavia só ocorreu em 1867, após sua morte.

O ponto de partida de Riemann é a questão não resolvida por Dirichlet em 1829: o que significa dizer que uma função é integrável? Ao contrário de Cauchy, que se restringiu, em suas considerações, a funções que são contínuas, ou, no máximo, seccionalmente contínuas, Riemann não faz outra hipótese sobre a função a ser integrada, além da exigência de que suas “somas de Riemann”, convirjam. E estabelece, a partir daí, critérios para a integrabilidade que caracterizam completamente a classe das funções integráveis.

Para isso, Riemann particionou o intervalo *[a; b]* num conjunto finito de pontos como já citados anteriormente. Só que nesse caso, os retângulos formados, não precisavam ter a mesma base, ou seja, a amplitude do intervalo $[x_{i-1}; x_i]$, indicada por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, podiam ou não ser diferentes. Essas partições determinam uma decomposição da área *S* em polígonos retangulares. Isto nos motiva a noção de *soma inferior* ou de *soma superior* associado a esta partição de *[a; b]*. Esta mesma idéia que vimos na figura 3.

A soma inferior é o supremo dos polígonos contidos em *S*, ou seja, o maior deles. Denotada por *s*(*f*, *P*), como sendo

$$s(f, P) = \sum_{i=0}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

onde $m_i = \inf\{ f(x); x_{i-1} \le x \le x_i \}$.

E a soma superior é o ínfimo dos polígonos que contém *S*, o menor deles e é denotada por *S*(*f*, *P*), como sendo

$$S(f, P) = \sum_{i=0}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

onde $M_i = \sup f\{ f(x); x_{i-1} \le x \le x_i \}$.

“*As duas somas definidas acima, são as chamadas somas de Darboux-Riemann*”.

Define assim a integral de Riemann, *f* uma função definida em *[a; b]*, *L* um número real e $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Dizemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

tende a *L*, quando $\max \Delta x_i \to 0$ e escrevemos

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L$$

Volume 1, Número 9 / 2008
ISSN 1519-745X

se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ que só dependa de ε mas não da particular escolha dos c_i, tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - L \right| < \varepsilon$$

para toda partição *P* de *[a; b]*, com $\max \Delta x_i < \delta$. Tal número *L*, que quando existe é único, denomina-se *integral* (de Riemann) de *f* em *[a; b]* e indica-se por $\int_b^a f(x)dx$. Então por definição:

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L .$$

Se $\int_b^a f(x)dx$ existe, então diremos que *f* é *integrável* (segundo Riemann) em *[a; b]*. É comum referir-se a $\int_b^a f(x)dx$ como *integral definida* de *f* em *[a; b]*.

Mas então, quando uma função é integrável a Riemann? Vejamos dois critérios:
Primeiro Critério: f: [a; b]→IR uma função limitada *em [a; b]*. Então *f* é integrável se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existir uma partição *P* do intervalo *[a; b]* tal que:

$$S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon ,$$

isto é, a diferença entre as somas é mínima.
Segundo Critério: Uma condição necessária e suficiente para que uma função *f*, definida e limitada num intervalo *[a; b]*, seja integrável, é que seus pontos de descontinuidades formem um conjunto de intervalos cujo comprimento é menor que ε.

As demonstrações dadas por Riemann em seu trabalho contêm várias lacunas; muitas passagens só podem ser justificadas a luz de resultados sobre continuidades e convergência uniformes, e na época de Riemann esses conceitos ainda não tinham sido definitivamente identificados e incorporados a matemática. Aliás, isto é motivo para admirarmos ainda mais as realizações de Riemann. Essas lacunas foram logo preenchidas por outros matemáticos.

5 Integral de Lebesgue

Henri Lebesgue nasceu na cidade francesa de Beauvais, em 28 de junho de 1875. Durante toda a sua vida, ocupou vários postos docentes nas universidades de Rennes e Poitiers, até que se tornou professor do Colégio da França. Pela década de 1920, Lebesgue foi reconhecido como um dos mais destacados matemáticos de sua época e eleito membro das mais prestigiosas sociedades científicas de sua época, como a Academia de Ciências de París e a Sociedade Matemática de Londres. Desenvolveu notáveis trabalhos nos campos da topologia e sobre as séries numéricas aplicadas aos teoremas da conservação da energia. Sua principal obra corresponde as suas investigações sobre as integrais.

Em 1901, Lebesgue publicou uma nota na qual propõe um novo conceito de integral contendo como caso particular a de Riemann, consequentemente a de Cauchy, eliminando várias deficiências dessas integrais, e em particular, dando uma resposta mais geral sobre a validade da fórmula de Newton-Leibniz. Este novo conceito permitiu estender a classe das funções integráveis.

Uma forma simples de ilustrar a diferença entre a integral de Lebesgue e a de Riemann é a seguinte analogia: Suponhamos que temos um saco cheio moedas (digamos reais!) e que pretendemos saber quantos reais temos no saco. Podemos contar estas moedas de duas formas distintas:

(i) Retiramos as moedas uma a uma do saco e vamos adicionando os seus valores;

(ii) Agrupamos as moedas do saco pelos seus valores, formando um grupo de moedas de 5 centavos, outro grupo de 10 centavos, etc. Contamos as moedas em cada grupo, multiplicamos pelos seus valores e somamos;

A segunda forma de contagem (que corresponde ao integral de Lebesgue) é muito mais eficiente do que a primeira forma de contagem (correspondente ao integral de Riemann), embora ambas forneçam o mesmo valor, claro. Note-se que para descrever (ii) tivemos de usar uma linguagem um pouco mais elaborada do que para descrever (i).

A definição da integral de Lebesgue também envolve de fato um pouco mais de conceitualização do que a definição da integral de Riemann, mas por fim as funções integráveis a Riemann também são integráveis a Lebesgue e o valor do integral e o mesmo.

Para a definição da integral de Riemann, foi necessário tomarmos uma função $f(x)$ fosse limitada. Se não fosse limitada se generalizava a Integral mediante a soma de seus limites. Com a diversidade com que se apresentam em muitas exposições da teoria de Lebesgue, o caso das funções limitadas ou não, desaparecem com a definição anterior, pois não são necessárias. A integral de Lebesgue permite reformular muitos conceitos de análise matemática de modo muito mais claro e natural. Houveram outros matemáticos que desenvolveram algumas teorias sobre integrais, algumas muito semelhantes, mas foi através de Riemann e Lebesgue que se pode ver a grande importância do estudo das figuras no desenvolvimento das integrais. Desenvolvimento esse que se deu de forma graduada e que até continuam sendo estudados.

Referências

AVILA, G. ***Introdução a Análise Matemática.*** 2aed., 2aimp., São Paulo: EDGARD, 2000.

FIGUEREDO, D. G**.** ***Análise I***. 2ªed., Rio de Janeiro: LTC, 1996.

GUIDORIZZI, H. L. ***Um curso de Cálculo***. Vol. 1, 2a ed., Rio de Janeiro: LTC, 1987.

LIMA, E. L. ***Análise Real***. Vol.1, 3ª ed., Rio De Janeiro: IMPA, 1997.

_________. ***Curso de Análise***. Vol. 1, 10ª ed., 2ª imp., Rio de Janeiro: IMPA, 2002.

MEDEIROS, L. A. & MELLO, E. A. ***Textos de Métodos Matemáticos 18*** **- A Integral de Lebesgue**. IM- UFRJ Rio de Janeiro, 1985.

PASTOR, J. R. & CALLEJA, P. P. & TREJO, C. A. ***Analisis Matemático***. 3ªed., Buenos Aires: KAPELUSZ S.A., 1965.